Série n°9 – 17 avril 2025
Elasticité - Plasticité

Exercice 1 :

Répondez par vrai ou faux aux questions suivantes :

	Vrai	Faux
a. *Dans un système statique où vous tirez sur un élastomère, la force que vous exercez est égale, mais de sens inversé, à la force exercée par le matériau.*	■	□

C'est le principe même de l'action-réaction en statique.

	Vrai	Faux
b. *La rigidité d'un cadre de vélo est déterminée par la limite élastique du matériau utilisé.*	□	■

C'est faux. La rigidité est liée au module élastique E d'un matériau et reflète sa capacité à se déformer élastiquement lorsqu'il est sollicité par une contrainte. Pour une contrainte donnée σ, la déformation résultante $\varepsilon = \sigma/E$ sera d'autant plus faible que le module élastique (et donc la rigidité) est élevé.

	Vrai	Faux
c. *Le module élastique de la plupart des matériaux diminue lorsque la température baisse.*	□	■

C'est l'inverse (voir par exemple l'exemple du cours donné pour le PMMA) : E augmente usuellement lorsque T baisse. Typiquement, le module élastique juste en-dessous du point de fusion d'un matériau est environ la moitié de la valeur à température ambiante.

	Vrai	Faux
d. *Dans une traction élastique uniaxiale, le coefficient de Poisson mesure la contraction des dimensions transverses.*	■	□
e. *La limite élastique $\sigma_Y = \sigma_{el}$ d'un alliage métallique est obtenue par l'intersection entre la courbe de traction uniaxiale $\sigma(\varepsilon)$ avec une droite parallèle à la tangente à cette courbe en $\varepsilon \to 0$* décalée de $\varepsilon = 0.2\%$.	■	□

C'est exact. Comme il est difficile de déterminer le point où $\sigma(\varepsilon)$ commence à dévier d'une relation linéaire, on trace cette parallèle décalée de 0.2%.

	Vrai	Faux
f. *Lors d'un saut à la perche, la déformation de celle-ci est inhomogène : l'intrados est en traction, l'extrados en compression.*	□	■

C'est précisément l'inverse. En considérant le rayon de courbure de la perche, la distance sur l'extrados est légèrement augmentée par rapport à l'axe central de la perche : il s'agit bien d'une traction. Alors que l'intrados est caractérisé par une distance plus faible, résultant en une compression.

	Vrai	Faux
g. *L'énergie plastique accumulée dans une pièce par unité de volume, qui a été déformée homogènement selon un axe, est*	□	■

donnée, après relâchement de la contrainte, par l'intégrale sous la courbe $\sigma(\varepsilon)$.

C'est faux. La surface sous la courbe $\sigma(\varepsilon)$ mesure bien la densité d'énergie de déformation, mais totale, soit élastique + plastique. Lors du relâchement de la contrainte, l'énergie élastique (qui pourrait être récupérée théoriquement) correspond à l'aire du triangle lors de la décharge, depuis ε_{xx} à ε_R (slide 38). Donc la densité d'énergie plastique, stockée essentiellement sous forme de défauts du matériau (dislocations pour les métaux, réarrangement des chaînes et formation de microfissures dans les thermoplastiques), est la surface sous la courbe $\sigma(\varepsilon)$ diminuée de la surface du triangle lors du relâchement de la contrainte.

h. *Si l'on dépasse la limite élastique d'un alliage métallique en traction uniaxiale, puis qu'on décharge celui-ci, sa nouvelle limite élastique a été augmentée alors que le module élastique reste le même.*

i. *Une dislocation vis dans un alliage métallique résulte d'un cisaillement perpendiculaire à la ligne de dislocation.*

Cettre description est celle d'une dislocation-coin où le vecteur de Burgers $\vec{b}$ est perpendiculaire au vecteur $\vec{t}$ de la ligne de dislocation. Pour une dislocation vis, le vecteur $\vec{b}$ est parallèle à la ligne de dislocation.

j. *Lors de la déformation plastique en traction du polyéthylène (thermoplastique), la dernière étape avant sa rupture correspond à solliciter les chaînes selon les liaisons fortes C-C.*

C'est exact. Lors de la déformation plastique d'un thermoplastique, les chaînes s'alignent progressivement dans l'axe de la contrainte, créant ainsi des microfissures (crazes). La striction du matériau progresse à contrainte presque constante, jusqu'à ce que toutes les chaînes soient alignées avec l'axe de la traction : on sollicite alors directement les liaisons fortes des chaînes, ce qui augmente la contrainte juste avant la rupture du matériau (voir slide 44).

Exercice 2 : Acier eutectoïde

L'acier eutectoïde (voir cours No 6) a une composition en carbone proche de 0.8%pds C. Suivant le traitement thermique appliqué, il peut avoir des propriétés mécaniques très élevées, le destinant à des applications tels que fils pour cordes de piano ou câbles de téléphériques.

a. *Le module élastique E de cet acier est de $200\ GPa$. Quel est l'allongement d'un fil de $1\ mm^2$ et de 1 m de long s'il soulève une charge de 10 kg poids ? (On négligera le poids du fil en acier).*

Un poids de 10 kg correspond à 98.1 N et donc à une contrainte de traction σ_{zz} égale à $98.1\ \mathrm{N}/1\ \mathrm{mm}^2\ \cong\ 98.1\ \mathrm{MPa}$ pour ce fil de $1\ \mathrm{mm}^2$ de section. En supposant que l'on soit toujours dans le domaine élastique, la déformation du fil vaudra :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} = \frac{98.1 \times 10^6 \text{ Pa}}{200 \times 10^9 \text{ Pa}} = 0.0491\% < 0.2\%$$

On est donc toujours bien, comme supposé pour appliquer la loi de Hooke, dans le domaine élastique.

L'allongement du fil, soit $\Delta L = \varepsilon_{zz} L$, où $L = 1$ m, sera donc de 0.491 mm.

b. *Calculez l'énergie de déformation subie par le fil.*

L'énergie de déformation du fil W est donnée par le produit de la densité d'énergie, $w = 0.5\sigma_{zz}\varepsilon_{zz}$ J/m^3, multipliée par le volume du fil SL. On a donc :

$$W = wSL = 0.5\sigma_{zz}\varepsilon_{zz}SL = 0.5 \times (98.1 \times 10^6 \text{ Pa}) \times (4.91 \times 10^{-4}) \times (10^{-6} \text{ m}^3)$$
$$= 2.41 \times 10^{-2} \text{ J}$$

c. *Le coefficient de Poisson de cet acier, comme la plupart des métaux, est de 0.3. Que vaut la section du fil avec la charge du point b.*

Le coefficient de Poisson ν mesure la contraction d'une dimension transverse lors d'une traction uniaxiale (ici selon z), soit $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xx} = -\nu\varepsilon_{zz}$. La section du fil soutenant la charge du point b vaut donc :

$$S = \pi R^2 = \pi R_0^2 (1 - \nu\varepsilon_{zz})^2 \cong S_0(1 - 2\nu\varepsilon_{zz}) = 0.9997 \text{ mm}^2$$

d. *La limite élastique $\sigma_{0.2}$ d'un tel acier après un traitement thermique est 1'000 MPa. Quelle est la charge maximale qu'il peut supporter si l'on veut rester dans le domaine élastique ?*

La contrainte maximale valant $1'000$ MPa, la charge maximale sera $F = \sigma_{0.2} \times S$, soit $1'000$ N ou 102 kg.

e. *On charge à nouveau ce fil, mais cette fois avec un poids de 150 kg : on remarque que le fil sous charge a une longueur de 1.02 m. Quelle longueur aura-t-il une fois le poids enlevé ?*

La contrainte $\sigma_{zz} = mg/S = 150 \times 9.81/10^{-6} \text{ N/m}^2 = 1'472$ MPa a dépassé la limite élastique. La déformation totale à cet instant vaut $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}^{el} + \varepsilon_{zz}^{pl} = (1.02 - 1)/1 = 2\%$. Lors de la décharge, qui se fait avec le même module élastique E, la composante élastique peut être déduite : $\varepsilon_{zz}^{el} = \sigma_{zz}/E \cong 0.74\%$. Il subsistera alors la déformation plastique du fil soit $(\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zz}^{el}) = 1.26\%$: le fil restera donc déformé plastiquement avec une longueur de 1.0126 m. (A noter que la déformation plastique se faisant à volume constant, sa section est aussi réduite d'autant.)

<u>*Question facultative :*</u> *Que se passerait-il si au lieu de soulever (progressivement) le poids de 10 kg, on suspendait ce poids au fil alors qu'il n'était pas chargé.*

Lorsque l'on soulève le poids, la force exercée par le fil progresse (et donc la contrainte), de 0 jusqu'à la valeur de 98.1 N selon le calcul fait aux points précédents, instant où le poids est alors effectivement soulevé. On suit donc bien la loi de Hooke et la densité d'énergie élastique impliquée correspond donc bien à l'aire du triangle. Il en irait de même si on suspendait progressivement au fil des petits éléments de poids, jusqu'à la valeur de 98.1 N, de manière à conserver à chaque incrément de poids une situation dite « quasi-statique ».

Mais comme pour un ressort, si l'on suspend d'un coup le poids de 10 kg, on n'est plus en régime statique : il y a une accélération de cette masse jusqu'à une distance maximale où l'énergie cinétique va devenir nulle. A cet instant, le changement d'énergie potentielle $mg\Delta h$ doit être égal au travail (supposé élastique) fourni par le fil jusque-là. On aurait donc :

$$mg\Delta h = \frac{1}{2}E\left(\frac{\Delta h}{L}\right)^2 SL \quad \Rightarrow \quad \Delta h = 2\frac{mgL}{SE} = 0.981\,mm$$

soit le double de la valeur calculée au point (a). La force exercée par le fil à cette position extrême étant le double de la valeur calculée pour une situation statique, la masse va remonter, puis redescendre… et osciller ainsi autour de la valeur calculée précédemment pour la longueur du fil sous charge. Après dissipation de l'énergie cinétique (par frottement avec l'air mais aussi par dissipation à l'intérieur du matériau), la position d'équilibre statique sera celle calculée précédemment (pour autant que le matériau n'ait pas « changé » par la création de défauts).

Exercice 3 : Choix d'un matériau

Quel matériau choisiriez-vous, sur la base de quels arguments, pour les applications suivantes :

a. *L'enveloppe d'un minisatellite peu sollicitée mécaniquement ou un bras d'un robot Delta subissant de très grandes accélérations.*

Pour les deux applications, un critère important est de minimiser la masse : pour le satellite, chaque kilogramme envoyé dans l'espace a un coût très élevé ; pour le bras d'un robot Delta, c'est la rapidité de mouvement, avec des accélérations de 30 ou 50 g, qui requiert de minimiser l'inertie, donc la masse. Pour les deux, il faut également une rigidité élevée. Ces deux critères orientent le choix vers un polymère renforcé par fibres de carbone.

b. *Un composant situé à l'avant d'une voiture pour absorber l'énergie en cas de choc.*

L'énergie cinétique d'une voiture de 1'500 kg roulant à 20 m/s (72 km/h) est $\frac{1}{2}\mathrm{mv}^2 = 300'000$ J. Pour absorber cette énergie en cas de choc, et protéger ainsi l'habitacle, il faut un composant dont l'énergie de déformation sous la courbe $\sigma(\varepsilon)$ est maximum. Pour cela, il faut une excellente résistance mécanique (axe vertical), mais également une bonne ductilité (axe horizontal). Les deux métaux pourront donc convenir, avec un petit avantage pour l'acier, malgré son poids emporté dans le véhicule plus élevé.

Si l'on approxime la densité d'énergie w de déformation plastique par $\sigma_{el}\varepsilon_R$, on obtient $80 \times 10^6\ \mathrm{J/m^3}$ pour l'alliage d'Al et $120 \times 10^6\ \mathrm{J/m^3}$ pour l'acier. Si l'on voulait absorber toute l'énergie cinétique du véhicule, il faudrait théoriquement un volume (déformé uniformément) de 3.75 litres et 2.5 litres, respectivement.

c. *Une boîte-boisson dont les parois latérales doivent supporter la compression lorsque ces boîtes sont empilées en palettes, mais pouvoir être formées par déformation.*

Pour pouvoir être formées, il faut des matériaux ductiles, donc un alliage d'aluminium ou un acier. Par ailleurs, lorsqu'un grand nombre de boîtes-boisson sont empilées en palettes, la contrainte de compression σ_{zz} que les parois des canettes subissent dépend directement du poids des canettes empilées au-dessus divisé par l'épaisseur e des parois. Leur déformation (en compression) valant dans le régime élastique σ_{zz}/E, la déformation en compression est directement proportionnelle à $(Ee)^{-1}$.

Par ailleurs, le poids à vide d'une boîte-boisson est proportionnel à ρe. Pour une épaisseur fixée, un poids minimum (ρ minimum) pour une déformation minimum (E maximum) revient à maximiser E/ρ. Or, les deux métaux sont équivalents : $E/\rho = 70'000/2'800 = 25\ \mathrm{MPa\ m^3/kg}$ pour l'alu, et $E/\rho = 200'000/8'000 = 25\ \mathrm{MPa\ m^3/kg}$ pour l'acier. De fait, on trouve des boîtes-boisson en acier (notamment pour la bière) et en alu (boissons sucrées).

d. Un cadre rigide de vélo léger.

Une grande rigidité (E élevé) et une masse spécifique faible font d'un cadre en polymère renforcé par des fibres de carbone le choix naturel pour un vélo de compétition.

e. Un pédalier de vélo.

Pour la même raison que celle évoquée pour le point d, on trouve dans le commerce des pédaliers en polymère renforcés par des fibres de carbone. Si l'on devait choisir un métal (pour éviter par exemple une rupture éventuelle, donc avoir une plus grande ténacité), l'aluminium sera préféré à l'acier car en flexion, c'est le rapport $E^{1/2}/\rho$ qui minimise simultanément la flexion et le poids (voir slide 27 du cours). La forte masse spécifique de l'acier pénalise ce matériau devant l'aluminium lorsqu'il est utilisé en flexion (ou en torsion). De fait, de nombreux pédaliers sont effectivement en alliages d'aluminium.

f. Un matériau ultra-dur pouvant être utilisé dans les systèmes de freinage ou comme abrasif.

Un matériau ayant une limite élastique très élevée ne subira que peu de dommages lorsqu'il est frotté contre un matériau ayant une faible limite élastique. De fait, on utilise le carbure de silicium comme abrasif de polissage ou pour le frottement d'un système de freinage (usure faible).

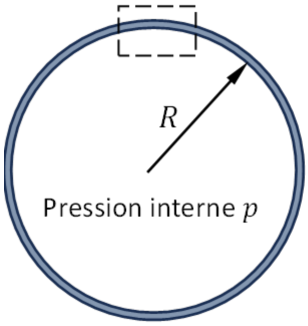
Exercice 4 : Capillaire sous pression

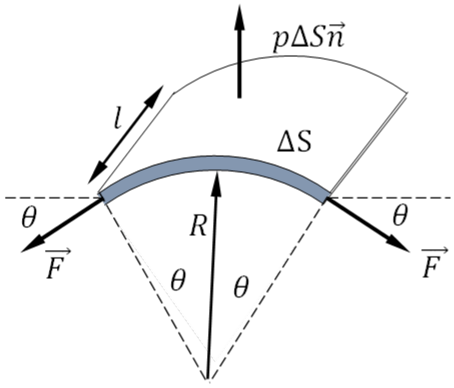
Un petit capillaire en polypropylène (PP) de rayon $1\ mm$ et d'épaisseur $0.1\ mm$ contient un fluide sous une pression de $10^5\ Pa$ pour un système de micro-fluidique. La pression interne induit une contrainte dans la paroi du capillaire comme indiqué sur le dessin ci-dessous, et donc une déformation de son rayon (on prendra $E = 1\ GPa$ pour le PP).
Considérez une petite portion du capillaire, d'ouverture $2\theta \ll \pi$ et de longueur l. Cela définit un élément de surface ΔS.

a. Calculez ΔS pour trouver la force normale exercée par la pression sur la paroi du capillaire.

L'élément d'arc d'ouverture 2θ a une longueur $2R\theta$ et l'élément de surface vaut donc $2R\theta \times l$. La pression exercée en tout point de cette surface est normale à la surface. Comme l'ouverture 2θ est petite, il n'est pas nécessaire de projeter chacun des éléments de force s'appliquant sur la surface ΔS et la force résultante vaudra donc simplement :

$$p(2R\theta \times l)$$





b. *Calculez la force nécessaire $\vec{F}$, tangentielle au capillaire, permettant de contrebalancer la force normale.*

Pour équilibrer cette force normale due à la pression, des forces $\vec{F}$ tangentielles à la paroi du capillaire sont exercées par le matériau sur cet élément de paroi. Chacune d'elles a une composante selon la normale $\vec{n}$ à l'élément de surface donnée par : -$|\vec{F}| \times \sin\theta \cong -|\vec{F}| \times \theta$, puisque θ est faible. Le capillaire étant à l'équilibre, on a donc :

$$-2|\vec{F}| \times \theta + p(2R\theta \times l) = 0 \;\Rightarrow\; |\vec{F}| = p(R \times l)$$

c. *En divisant cette force $\vec{F}$ par la surface du capillaire sur laquelle elle s'exerce, soit $(e \times l)$, vous trouvez ainsi la contrainte tangentielle dans la paroi du capillaire. Comme cette contrainte est circonférentielle, elle est dénommée $\sigma_{\theta\theta}$ (« hoop stress »).*

La contrainte tangentielle $\sigma_{\theta\theta}$ étant le rapport de la force $|\vec{F}|$ divisée par l'élément de paroi d'épaisseur e et de longueur l, on a :

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{|\vec{F}|}{e \times l} = \frac{p(R \times l)}{e \times l} = p\frac{R}{e}$$

Le résultat semble logique : la contrainte dans la paroi du capillaire augmente avec la pression à l'intérieur, avec son rayon, et avec l'inverse de son épaisseur.

d. *Connaissant cette contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ et le module élastique E du PP, calculez la déformation de la circonférence du capillaire, et donc l'augmentation de son rayon.*

On peut imaginer que la circonférence du capillaire $(2\pi R)$ va augmenter avec cette contrainte tangentielle, comme l'est un élément parallélépipédique sous l'action d'une contrainte σ_{zz}. La déformation suit la loi de Hooke et on peut écrire :

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{2\pi(R + \Delta R) - 2\pi R}{2\pi R} = \frac{\Delta R}{R} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E} = \frac{pR}{Ee}$$

<u>Application numérique :</u>

$$\sigma_{\theta\theta} = p\frac{R}{e} = 10^5\ \mathrm{Pa}\,\frac{1\ \mathrm{mm}}{0.1\ \mathrm{mm}} = 10^6\ \mathrm{Pa}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\Delta R}{R} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E} = \frac{10^6\ \mathrm{Pa}}{10^9\ \mathrm{Pa}} = 10^{-3} \quad\Rightarrow\quad \Delta R = 10^{-3}\ \mathrm{mm} = 1\ \mu\mathrm{m}$$